

## ANÁLISE PRAXEOLÓGICA E ARTICULAÇÃO DE CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS: NOÇÃO DE FUNÇÃO AFIM NO ENSINO MÉDIO NO BRASIL

Marlene Alves Dias, Tânia Maria Mendonça Campos, Sirlene Neves de Andrade

UNIBAN

Brasil

[alvesdias@ig.com.br](mailto:alvesdias@ig.com.br), [taniammcampos@hotmail.com](mailto:taniammcampos@hotmail.com), [sirlene-neves@hotmail.com](mailto:sirlene-neves@hotmail.com)

**Resumen.** El objetivo de este trabajo de investigación es identificar las organizaciones praxeológicas que permiten la articulación de la noción de función afín con otras nociones tanto en el contexto matemático como extramatemático en la Educación Media en Brasil. Los análisis se apoyan en la Teoría Antropológica de lo didáctico de Chevallard (2001) y los enfoques teóricos en términos de marcos definidos por Douady (1992) y niveles de conocimiento que se esperan de los estudiantes según la definición de Robert (1997). Tres libros de texto que fueron analizados darán una visión general de las relaciones institucionales que sobreviven actualmente en Brasil. Observamos la existencia de diferentes formas de articulación que dependen de las técnicas desarrolladas, necesitando la atención de profesores que deben proponer el mayor número posible de situaciones para que sus estudiantes puedan aplicar la noción de función afín en diferentes tareas, sean ellas escolares o no.

**Palabras clave:** función afín, praxeologías, niveles de conocimiento, marcos, puntos de vista

**Abstract.** The objective of this research work is to identify the praxeological organizations that allow articulation of the notion of function in order with other notions in a mathematical and extramathematical context in Brazilian high school. Analyses are based on the Anthropological Theory of Didactic of Chevallard (2001) and the theoretical approaches in terms of frames as defined by Douady (1992) and levels of knowledge expected from students as defined by Robert (1997). Three textbooks were analyzed to give an overview of the institutional relationships that survive today in Brazil. We observed the existence of different forms of articulation that rely on techniques developed, requiring the attention of teachers who should propose the largest possible number of situations so that students can apply the notion of function in order for different tasks, whether related or not

**Key words:** linear function, praxeology, levels of knowledge, frames, points of view

### Introdução

No Brasil, em função das necessidades impostas pela sociedade, a partir de 2000 por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – Brasil (2000, 2006) são propostas mudanças no Ensino Médio fundamentadas na formação geral dos estudantes de forma que os mesmos desenvolvam as capacidades de pesquisar e analisar informações, relacioná-las, selecioná-las, aplicá-las de maneira a aprenderem e serem capazes de criar e formular quando defronte a situações desconhecidas, mas para as quais dispõe-se de conhecimentos para resolvê-las.

Isso conduz a propostas de ensino e aprendizagem que possibilitem a articulação das noções a serem desenvolvidas no Ensino Médio tanto quanto se consideram a própria Matemática assim como aquelas de contexto que os estudantes podem encontrar em sua vida cotidiana e profissional.

Dessa forma, o objetivo desse trabalho é mostrar quais as propostas institucionais, aqui denominadas relações institucionais no sentido apresentado em Chevallard (1992), que sobrevivem atualmente quando se considera o ensino e a aprendizagem da noção de função afim no Ensino Médio brasileiro.

Para isso, escolhe-se como referencial teórico dessa pesquisa a noção de praxeologia (tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias) e ostensivos e não ostensivos conforme definição de Chevallard (2001), a abordagem teórica em termos de quadros conforme definição de Douady (1992), a noção de nível de conhecimento esperado dos estudantes segundo definição de Robert (1997).

Isso possibilitou a construção de uma grade de análise que permitiu propor o estudo e a identificação das relações institucionais existentes via livros didáticos indicados para serem utilizados pelos estudantes brasileiros do Ensino Médio. Foram analisados três livros didáticos que mostram a existência de diferentes relações institucionais para o desenvolvimento da noção de função afim, em particular, quando se considera a proposta de articulação dessa noção com a noção de juros simples, que corresponde a um possível contexto profissional para os estudantes do Ensino Médio, observou-se que ela só é desenvolvida em um dos livros analisados.

Em relação às articulações na própria matemática, essas são desenvolvidas parcialmente em duas das obras analisadas e com maiores detalhes na obra que propõe a articulação da função afim com a noção de progressão aritmética e juros simples. Isso mostra que, mesmo que essas articulações não sejam trabalhadas em sala de aula, os estudantes dispõem de meios para completarem seus estudos, pois espera-se que ao final do Ensino Médio os mesmos tenham autonomia suficiente para tanto, uma vez que o objetivo dessa etapa escolar é de desenvolver as capacidades apresentadas no início desse resumo. A seguir apresentamos uma breve discussão do referencial teórico utilizado na pesquisa.

### Referencial teórico

Iniciamos considerando os aportes teóricos da Teoria Antropológica do Didático desenvolvida por Chevallard (1992, 1994, 2001) por terem sido as noções de relações institucional e pessoal, organizações praxeológicas e ostensivos e não ostensivos centrais para o desenvolvimento da pesquisa.

Chevallard (1992) parte das noções primitivas de objeto  $O$ , pessoa  $X$  e instituição  $I$ , e define relação pessoal ao objeto  $O$  quando esse existe para pelo menos uma pessoa  $X$  e relação institucional a esse mesmo objeto  $O$  quando uma instituição  $I$  tem uma relação com esse

objeto O. Segundo Chevallard (1992) tudo é objeto, existem por exemplo os objetos “escola”, “professor”, “aprender”, “saber”, “dor de dente”, etc. Logo, a noção de função afim é segundo essa definição um objeto O, no caso um objeto matemático.

Consideramos ainda para as nossas análises o conceito de organização praxeológica ou praxeologia, segundo Chevallard uma praxeologia é composta de tipos de tarefas, tipos de técnicas, tecnologias ou discurso sobre as técnicas e teorias que são as tecnologias das tecnologias. Nessas organizações o par tipos de tarefas e técnicas corresponde ao bloco prático (saber como fazer) e o par tecnologia e teoria corresponde ao bloco teórico (saber descrever, explicar, justificar e controlar as técnicas) como indica a própria palavra praxeologia.

Para melhor identificar os elementos que permitem desenvolver e justificar as técnicas utilizadas consideramos também as noções de ostensivos e não ostensivos introduzidas em Chevallard (1994), que define ostensivos como sendo os objetos que têm para nós uma forma material e sensível e portanto podem ser manipulados, isto é, eles correspondem às representações externas e os não ostensivos que usualmente denominamos noções, conceitos, ideias, etc, que ao contrário dos objetos ostensivos só podem ser evocados por meio da manipulação dos ostensivos que lhe são associados.

Chevallard (1994) considera os seguintes exemplos de ostensivos – objetos materiais (uma caneta, um compasso, etc) ou ostensivos materiais, os gestos ou ostensivos gestuais, as palavras, e, mais genericamente, o discurso ou ostensivos discursivos, os esquemas, desenhos e grafismos ou ostensivos gráficos, as escritas e formalismos ou ostensivos escriturais.

É importante observar que Chevallard (1994) ressalta a existência de uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos, pois segundo ele os ostensivos são manipulados por meio de regras, cuja distinção é feita pelos não ostensivos, enquanto que os não ostensivos são evocados por meio da manipulação dos ostensivos.

Para refinar as análises recorreremos ainda às noções de quadro e mudança de quadros introduzidas por Douady (1992). Apresentamos a seguir uma breve descrição dessas ferramentas teóricas de análise.

Douady (1992) define quadro como um ramo da Matemática constituído de objetos, suas relações, formulações eventualmente diversas que permitem a desenvolver imagens mentais associadas a esses objetos, relações e formulações e cujo papel essencial é servir de ferramenta para o funcionamento do quadro.

Essa definição lhe permite transpor para a didática a forma de trabalho do matemático por meio da noção de mudança de quadros que consiste em obter diferentes formulações para um mesmo problema que possibilitam utilizar ferramentas e técnicas que não se aplicavam na primeira formulação.

Para as nossas análises a noção de quadro permite identificar as necessidades em termos de conhecimentos que possam dispor e mobilizar os estudantes para efetuar as mudanças de quadros quando essas são pedidas implícita ou explicitamente nas tarefas que lhes são propostas.

Para melhor compreender as reais possibilidades dos estudantes em termos de utilização de seus conhecimentos quando da resolução de uma tarefa sobre a noção de função afim que lhe é proposta ao final do Ensino Médio recorreremos à abordagem teórica em termos de níveis de conhecimento esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1997) que introduz os três níveis, técnico, mobilizável e disponível para os quais consideramos a definição dada por Robert e um exemplo sobre o objeto de estudo desse trabalho por nós identificado na sequência.

O nível técnico corresponde a um trabalho isolado, local e concreto, em geral, associado às definições e ferramentas a serem utilizadas em determinada tarefa. O estudante encontra, na tarefa, todos os elementos necessários para sua realização. Exemplo: os exercícios de fixação de uma definição ou propriedade como, por exemplo, determinar o valor numérico da função  $f(x)$  dado  $x$ .

O nível mobilizável corresponde a resolver uma tarefa por meio da identificação de um saber que é pedido explicitamente. Nesse caso, é preciso saber utilizar ferramentas específicas de forma correta e em alguns momentos o conhecimento a ser mobilizado já corresponde a uma determinada organização. Exemplo, esboçar o gráfico de uma função afim dada por meio do ostensivo de representação escritural simbólico (fórmula).

O nível disponível corresponde a responder corretamente a tarefa dada, porém não é indicado nenhum caminho ou ferramenta que possam auxiliar na sua resolução. Nesse nível é preciso dispor de meios para encontrar ou criar contra-exemplos, para articular diferentes noções matemáticas fazendo as relações necessárias entre elas, para efetuar mudanças de quadros utilizando os ostensivos de representação adequados, aplicar métodos não previstos. Exemplo:

07. Para estipular o preço por seu trabalho, o pintor de paredes André cobra uma taxa fixa de R\$ 50,00 e mais uma taxa de R\$ 10,00 por  $m^2$  pintado. André vai pintar uma parede de  $10m^2$ . Quanto André cobrará por esse trabalho?
- (A) R\$ 50,00  
 (B) R\$ 100,00  
 (C) R\$ 150,00  
 (D) R\$ 200,00

Figura 1: Saresp 2005 - Prova de Matemática da 1ª série do Ensino Médio

Na sequência apresentamos a metodologia utilizada na pesquisa considerando a grade de análise construída a partir do referencial teórico apresentado acima e com um exemplo que auxilia a compreender a sua necessidade, a forma de análise desenvolvida e os resultados encontrados.

### Metodologia

Trata-se de uma pesquisa documental desenvolvida em três fases:

1. Construção de uma grade de análise, inspirada na grade de Dias (1998), que serviu de instrumento para identificar tanto as organizações matemáticas como as didáticas.
2. Análise das diferentes formas de organizações matemáticas e didáticas existentes via análise de livros didáticos, documentos oficiais e macro-avaliações.
3. Identificação das tarefas usuais privilegiadas por meio da análise de dois livros didáticos avaliados e indicados pelo Ministério da Educação e um livro indicado para a formação de professores do Ensino Médio.

Para a análise dos documentos escolhidos, em particular, dos livros didáticos construímos a seguinte grade de análise:

- ❖ Nível de conhecimento exigido na tarefa:
- ❖ Ostensivos de representação dados no enunciado:
- ❖ Quadro em que a tarefa é enunciada:
- ❖ Ostensivos de representação exigidos na solução da tarefa:
- ❖ Não ostensivos em jogo na tarefa:
- ❖ Quadro em que a tarefa é resolvida:
- ❖ Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas:

### Exemplo de aplicação da grade

08. Uma companhia de telefonia celular possui dois planos de tarifação para seus usuários: Plano I: taxa de R\$ 20,00 por mês, mais R\$ 0,30 por minuto de conversação Plano II: sem taxa mensal e R\$ 0,50 por minuto de conversação O plano I é o mais vantajoso para as pessoas que, por mês, falam

- (A) mais do que 100 minutos
- (B) menos do que 100 minutos
- (C) mais do que 40 minutos
- (D) menos do que 40 minutos

Figura 2: Saresp 2005 - Prova de Matemática da 1ª série do Ensino Médio

- ❖ Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- ❖ Ostensivos de representação dados no enunciado: ostensivos discursivo (língua natural)
- ❖ Quadro em que a tarefa é enunciada: numérico;
- ❖ Ostensivos de representação exigidos na solução da tarefa: ostensivos escriturais (representação algébrica intrínseca e explícita) e ostensivos gráficos (representação gráfica)
- ❖ Não ostensivos em jogo na tarefa: a noção de função afim, a noção de taxa de variação
- ❖ Quadro em que a tarefa é resolvida: algébrico
- ❖ Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: reconhecimento da função afim no enunciado da situação, articulação entre a noção de função afim e a noção de taxa de crescimento. Esta tarefa é ideal para mostrar a importância do ostensivo de representação gráfico, pois quando se esboça o gráfico das funções torna-se mais simples a análise da estratégia mais vantajosa, por meio da interpretação dos dados no gráfico.

A seguir apresentamos alguns resultados retirados das análises efetuadas.

### Alguns Resultados

O referencial teórico escolhido e a grade construída em função desse referencial nos permitiu identificar as diferentes praxeologias que sobrevivem atualmente no Ensino Médio brasileiro quando se introduz a noção de função afim.

A análise foi feita considerando três livros didáticos indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático que distribui livros para todos os estudantes das escolas públicas brasileiras, o que permitiu considerar este material como uma das fontes para a identificação das relações institucionais ao objeto função afim que os estudantes se sujeitam quando cursam o atual Ensino Médio brasileiro.

Esse estudo identifica os diferentes ostensivos e não ostensivos em jogo nas tarefas propostas aos estudantes dessa etapa escolar assim como dos quadros privilegiados (quadros numéricos e algébrico) e das possíveis articulações intramatemáticas (função afim e progressão aritmética, função afim e reta em geometria analítica, função afim e taxa de variação e função linear e grandezas diretamente proporcionais) e extramatemáticas (função afim e terminologia, movimento uniforme, juros simples, situações contextualizadas e do cotidiano).

Além disso, foi possível saber qual o nível de conhecimento (técnico, mobilizável e disponível) pode ser esperado dos estudantes brasileiros que terminam o Ensino Médio e qual o nível de conhecimento que era esperado dos alunos que terminaram o ensino fundamental em relação aos conhecimentos matemáticos que podem ser associados à noção de função afim e que são considerados como conhecimentos prévios disponíveis para aqueles que iniciam o Ensino Médio.

Observamos ainda que a grade de análise serviu, também, para verificar as regularidades e diferenças existentes nos livros escolhidos e se esses estavam ou não em conformidade com as propostas oficiais.

Nesses mesmos livros foi possível identificar que existe um discurso tecnológico ou uma tecnologia, diferente nos livros analisados, mas que pode auxiliar professores e estudantes, em particular, quando se trata de desenvolver tarefas que exigem o nível mobilizável ou disponível tanto da noção de função afim como das outras noções em jogo.

Em geral, nas tarefas destinadas aos estudantes (exercícios propostos) verificamos que na maioria dos casos, fica a cargo do estudante desenvolver a maioria das tarefas que apresentam um contexto de uma situação-problema, exigindo dele um bom nível de leitura e interpretação de textos, além de conhecimentos matemáticos ou relacionados a outras ciências que se supõe tenham sido adquiridos anteriormente e que nesse momento são considerados disponíveis.

Esse trabalho nos permitiu retirar algumas considerações que apresentamos a seguir.

### Considerações Finais

Observamos a existência de relações institucionais que privilegiam a articulação de conhecimento intramatemáticos e extramatemáticos já adquiridos no Ensino Fundamental e os que estão sendo trabalhados no Ensino Médio, mas é preciso que professores e estudantes fiquem atentos para todas as possibilidades de articulação entre as diferentes formas de conhecimento relacionadas à noção de função afim e suas respectivas representações, necessitando ter como referência o maior número de casos possíveis para ser capaz de trabalhar de forma autônoma em um nível disponível.

Certamente, não é uma tarefa fácil, mas para os estudantes do Ensino Médio que desejam continuar seus estudos, principalmente nas áreas de ciências exatas em que a noção de função afim e suas representações são essenciais para o desenvolvimento de tarefas tanto intramatemáticas como extramatemáticas.

Ressaltamos ainda que não é possível tratar todas as situações cotidianas ou contextualizadas associadas a uma determinada noção matemática e sempre ficará para o estudante um trabalho em nível disponível que ele, mesmo depois de certo tempo, deverá ser capaz de desenvolver, isto é, o estudante deve ser suficientemente autônomo para desenvolver seu próprio projeto de estudo.

Verificamos por meio das análises efetuadas, que as articulações de quadros, manipulação de ostensivos e respectiva evocação do não ostensivo associado devem ser explicitadas por meio de um discurso tecnológico ou tecnologia que as justifique e que só assim é possível compreender quais os diferentes níveis de conhecimento em jogo no desenvolvimento da noção de função afim. Seguramente, não se deve utilizar toda essa terminologia no trabalho em sala de aula com os alunos, mas uma reflexão por parte dos professores sobre essas questões poderá facilitar a compreender as dificuldades dos estudantes.

### **Referências bibliográficas.**

Bianchini, E. e Paccola, H. (2006). Matemática. São Paulo: Moderna.

Brasil. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Brasília: MEC, SEMTEC. Acesso em 20 de março de 2010, de <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>

Brasil. (2006). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio +: Ciências da Natureza e suas tecnologias*. Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília: MEC, SEMTEC. Acesso em 20 de março de 2010, de <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1994). Ostensifs e non-ostensifs dans l'activité mathématique. En *Actes du Séminaire de l'Associazione Mathesi*, (pp. 190-200). Itália: Séminaire de l'Associazione Mathesis.

Chevallard, Y. (2001). Organiser l'étude.I. Structures & Fonctions. En *Actes de la XI école d'été de didactique des mathématiques* (pp.3-22). França: La Pensée Sauvage.



- Dante, L.R. (2007). Matemática. São Paulo: Ática.
- Dias, M.A. (1998). Les problèmes d’articulation entre points de vue “cartésien” et “paramétrique” dans l’enseignement de l’algèbre linéaire. Paris: IREM Paris 7.
- Douady, R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l’enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.
- Lima, E.L., Carvalho, P.C.P., Warner, E. e Morgado, A.C. (2007). A Matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.
- Robert, A. (1997). Quelques outils d’analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l’université. En *Actes de la IX école d’été de didactique des mathématiques de Houlgate*, (pp.193-212). França: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.
- São Paulo (2005). *Saresp: Encontro de Matemática Avaliações externas*. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – São Paulo: SEE, CENP.